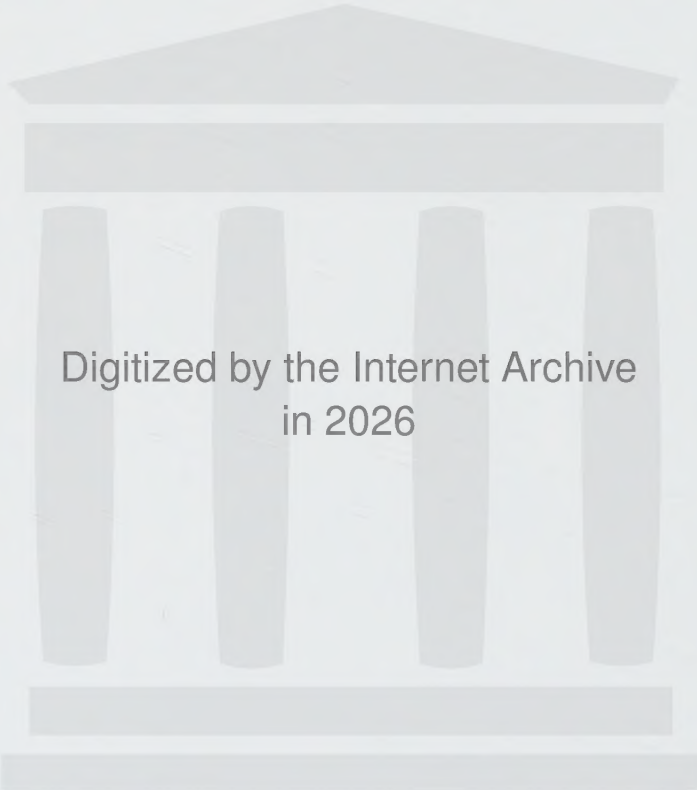


**Punktweise obere Schranken
für Eigenfunktionen bei Schrödingeroperatoren**

Andreas M. Hinz

1902



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552302_0023

Punktweise obere Schranken für Eigenfunktionen

bei Schrödingeroperatoren

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades

der Fakultät für Mathematik

der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Andreas M. Hinz

am

23. Juni 1982



1. Berichterstatter: Prof. Dr. E. Wienholtz
2. Berichterstatter: Priv.-Doz. Dr. J. Voigt

Tag der mündlichen Prüfung: 27. Oktober 1982

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. E. Wienholtz für die Aufgabenstellung und für die Betreuung.

Die Endfassung der vorliegenden Arbeit entstand während eines Aufenthaltes an der Abteilung für Theoretische Physik der Universität Genf; für das mir dort entgegengebrachte Interesse und die angenehme Arbeitsatmosphäre danke ich besonders Herrn Dr. W. Amrein.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird das Abklingverhalten von Eigenfunktionen $v \in L_2(\mathbb{R}^n)$ einiger Schrödingeroperatoren $-\Delta + q$ untersucht. Ziel ist das Auffinden von punktwisen oberen Schranken für $|v|$, also von solchen möglichst rasch gegen 0 gehenden (radialsymmetrischen) Funktionen h , die außerhalb eines Kompaktums $|v(x)| \leq h(x)$ sicherstellen.

Die Einleitung in §1 bringt eine Erläuterung dieser Problemstellung (1.1), sowie einen Überblick über die bisher erreichten Ergebnisse (1.2). Außerdem wird in 1.3 die Methode des subharmonischen Vergleichs skizziert, welche einen wesentlichen Einfluß auf die in dieser Arbeit dargestellte Vorgehensweise hatte.

Der §2 beschäftigt sich mit Abschätzungen für Eigenfunktionen v zum Eigenwert λ von $-\Delta + q$, wenn q außerhalb eines Kompaktums stetig ist und dort zusätzlich eine explizite untere Schranke $F(x)$ für $q(x) - \lambda$ bekannt ist. Die Ergebnisse entsprechen für nichtnegatives F den mit älteren Methoden erreichten, gehen aber sonst darüber hinaus. So kann in 2.3 (Satz 3) exemplarisch im Falle eines um λ oszillierenden Potentials q für die zugehörigen Eigenfunktionen v eine punktweise obere Schranke $h(x) = ce^{-|x|}$ hergeleitet werden, für $q(x) - \lambda \geq -\frac{b}{|x|^2}$ wird $|v(x)| \leq c|x|^{-t}$ nachgewiesen (t hängt von b ab). Das schließt auch Fälle ein, wo λ nicht diskreter Eigenwert ist.

Die elementare Methode zum Beweis von Satz 3 basiert auf einer optimalen Integralabschätzung (Satz 1) in 2.1 und einer Mittelwertungleichung (Satz 2), die in 2.2 ausgearbeitet wird. Einige Beispiele in 2.4 illustrieren abschließend die Qualität des Erreichten.

Inhalt

	Seite
§1. Einleitung	4
1.1. Problemstellung	4
1.2. Historischer Überblick	6
1.3. Die Methode des subharmonischen Vergleichs	9
§2. Abschätzungen für Eigenfunktionen von Operatoren $-\Delta + q$ mit außerhalb eines Kompaktums stetigem q	12
2.1. Integralabschätzungen	13
2.2. Mittelwertungleichungen	17
2.3. Punktweise Schranken für Eigenfunktionen	25
2.4. Beispiele	31
Literatur	35

§1. Einleitung

1.1. Problemstellung

In $L_2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, betrachtet man den Operator T , definiert auf $D(T) := C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ oder $D(T) := C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ durch:

$\forall \phi \in D(T): T\phi := -\Delta\phi + q\phi$; hierin ist $q \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^n)$, beziehungsweise $q \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, reellwertig (zu den Bezeichnungen

siehe [49]). Es sei λ ein reeller Eigenwert von T^* , dem zu T adjungierten Operator, v eine zugehörige (o.E. reellwertige) Eigenfunktion. Gegenstand der Untersuchung ist das Verhalten von $|v(x)|$ bei großem $|x|$. Das Ziel sind Abschätzungen der Art $\exists \epsilon \in \mathbb{R}_0^+ \forall x \in (K(0, R): |v(x)| \leq \epsilon h(x)$, worin $h: (K(0, R) \rightarrow \mathbb{R}^+$ explizit gegeben ist und für $|x| \rightarrow \infty$ gegen 0 geht.

Trotz der Eigenschaft " $v \in L_2(\mathbb{R}^n)$ " ist die Frage nach dem punktweisen Abklingverhalten der Eigenfunktionen von Bedeutung, da L_2 -Funktionen auch für große Werte von $|x|$ nicht einmal beschränkt zu sein brauchen. Die Erwartungen sowohl aus der Mathematik, gebildet durch Vergleich mit einfachen, lösbaren Beispielen, als auch aus der Theoretischen Physik, wo T unter dem Namen "Schrödingeroperator" in der nichtrelativistischen Quantenmechanik eine wichtige Rolle spielt, sprechen für einen Zusammenhang zwischen der Güte von h (d.h. der Schnelligkeit des Abklingens) und dem Verhalten von $q(x) - \lambda$ für $|x| \rightarrow \infty$.

Das von Resultaten im Falle $n=1$ (A.Wintner 1949[50], C.R.Putnam 1950[35], P.Hartman und C.R.Putnam 1950[17]) angeregte erste Ergebnis im höherdimensionalen Fall stammt von Ā.Ā.Šnol' 1957[47] (vgl. [16], S.175ff) und lautet:

Satz 0 (Ė.Ė.Šnol'): Sei $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $q_0 := \inf\{q(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\} > -\infty$ (dann ist T auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ wesentlich selbstadjungiert, also $\bar{T} = T^*$, vgl. [20], S.169), $\lambda \in \sigma_d(\bar{T})$.

Dann gilt für jede zu λ gehörige Eigenfunktion v :

für alle $a < a_0 := \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{(\text{dist}(\sigma(\bar{T}), \lambda))^2}{\gamma^2} \right)$ (γ hängt nur von q_0 ab) gibt es ein $c > 0$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$: $|v(x)| \leq c e^{-a|x|}$.

Der Beweis besteht aus der Herleitung mit spektraltheoretischen Mitteln einer Integralabschätzung $\forall r \geq 0$: $\int_{|y| \geq r} v^2(y) dy \leq c e^{-2ar}$ und der Verwendung einer Mittelwertungleichung:

Lemma 0 (Ė.Ė.Šnol'): Unter den Voraussetzungen von Satz 0 und zu $t > 0$ gibt es ein $c(q_0, t) > 0$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$v^2(x) \leq c(q_0, t) \int_{K(x, t)} v^2(y) dy.$$

Vergleichbare Aussagen bewies mit ähnlichen Mitteln U.-W.Schmincke 1969[37], wobei auch Probleme mit allgemeinerem Hauptteil des Operators T betrachtet wurden.

Satz 0 hat drei wesentliche Nachteile:

- die Voraussetzungen an q (Beschränktheit nach unten, Stetigkeit) sind für die Anwendungen in der Physik zu stark einschränkend;
- die Zahl a_0 entspricht nicht den Erwartungen;
- die Methode ist nicht für $\lambda \in \sigma_p(\bar{T}) \setminus \sigma_d(\bar{T})$ anwendbar (lediglich Lemma 0 gilt bereits für alle $\lambda \in \sigma_p(\bar{T})$ und ergibt das punktweise Abklingen der Eigenfunktionen gegen 0 schlechthin).

1.2. Historischer Überblick

Besonders Punkt A führte zu einer rasanten Entwicklung in der Bearbeitung dieses Problemkreises in der Literatur der Theoretischen Physik und Chemie. Der hier hauptsächlich interessierende Operator ist der N-Körper-Hamiltonoperator, wobei zwischen den Teilchen Zwei-Körper-Wechselwirkungen (z.B. Coulombkräfte) wirken. Bei dem resultierenden Schrödingeroperator T weist das Potential q jedoch Singularitäten auf, die sich (für $N \geq 3$) sogar bis ins Unendliche erstrecken, so daß Satz 0 nicht anwendbar ist.

Die ersten Arbeiten (E.L.Slaglie und E.H.Wichmann 1962 [46], N.W.Bazley und D.W.Fox 1969[9], R.Ahlrichs 1972/73 [3], [4]) behandelten spezielle Probleme mit ebenso speziellen Methoden. Die Betrachtung von L_2 -Abschätzungen der Art " $v \in D(h^{-1})$ (d.h. $h^{-1}v \in L_2(\mathbb{R}^n)$)" für die Eigenfunktionen von N-Körper-Operatoren, erstmals durchgeführt von W.Hunziker 1964[25], J.M.Combes 1969[12] und B.Simon 1971 [40] (S.154f), führte zu einem recht allgemeinen Resultat durch A.J.O'Connor 1973[33] beziehungsweise J.M.Combes und L.Thomas 1973[13]. Diese L_2 -Schränken wurden schließlich von B.Simon 1974[41] zu Ergebnissen über das punktweise Abklingen erweitert durch Ausarbeitung einer Methode von T.Kato 1957[26], mit der Regularitätseigenschaften der Eigenfunktionen untersucht worden waren. (In [36] findet sich, S.191ff, eine Zusammenfassung der Arbeiten [33], [13], [41] und [26], sowie, S.348ff, ein Überblick über die Methoden bis zum Jahre 1977.)

Die bis dahin gefundenen oberen Schranken $h(x)$ waren alle radialsymmetrisch, das heißt es war $h(x) = \tilde{h}(|x|)$ mit einem $\tilde{h}: [R, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$. Die Gestalt der N-Körper-Operatoren läßt aber eine Abhängigkeit des Abklingverhaltens von der Richtung erwarten. Erste Ergebnisse für Spezialfälle fanden

S.P.Merkur'ev 1974[31] und J.Morgan III 1977[32]. Als geeignetste Methode erwies sich zunächst der subharmonische Vergleich, von B.Simon 1975[43] bei der Betrachtung von Operatoren mit rasch anwachsenden Potentialen in diesen Problemkreis eingeführt und von ihm (zusammen mit P.Deift, W.Hunziker und E.Vock 1978[14]; hier wird auch noch eine auf der "geometrischen Spektraltheorie" basierende Methode demonstriert), sowie M. und T.Hoffmann-Ostenhof (1977/78[21], [23], mit R.Ahlrichs 1978[5], [24] und J.Morgan III 1980[34] (S.62-67)) weiterentwickelt. Die Ergebnisse waren aber, bis auf Spezialfälle, nicht immer befriedigend. Im wesentlichen optimale Resultate erbrachte erst eine neue Methode von S.Agmon 1979[2] (vgl. [38], S.142-148). Hier, wie vorher schon einmal bei L.Lithner 1965[30] im Falle von Operatoren wie in Satz 0, wurde eine spezielle Metrik eingeführt, so daß die oberen Schranken die Gestalt
$$h(x) = c_\epsilon e^{-(1-\epsilon)\rho(x)}$$
 haben, worin $\rho(x)$ der geodätische Abstand von x zu 0 in dieser Metrik ist, $\epsilon > 0$ beliebig klein. Zwei neue Arbeiten von B.Simon (mit R.Carmona 1981[11], bzw. E.Lieb 1980[29]) bauen auf dieser, sowie auf einer von R.Carmona 1978[10] mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Mitteln entwickelten Methode auf und behandeln auch die Frage nach der Optimalität des Erreichten.

Solche Optimalitätsaussagen der Art " $\forall(x) \geq h_u(x)$ " mit einer explizit gegebenen Funktion $h_u: CK(0, R) \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $h_u(x) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$ und wobei h_u nur wenig schneller abklingt als $h_0 := h$, sind nur möglich für außerhalb eines Kompaktums positive Eigenfunktionen, zum Beispiel zum kleinsten Eigenwert (siehe auch [43], [34] (S.62-67), [10] und [22]). Einen anderen Zugang zu unteren Schranken,

der auch für Eigenfunktionen mit beliebig häufigem Vorzeichenwechsel geeignet ist, fanden C.Bardos und M.Mérigot 1975/77[7], [8].

1.3. Die Methode des subharmonischen Vergleichs

Die im Zuge der skizzierten Entwicklung zutage getretenen neuen Methoden erlaubten auch in einigen Fällen eine Verbesserung der Ergebnisse unter den Voraussetzungen des Satz 0 und damit eine Behandlung von Nachteil B. So erreichte W.G.Faris 1972[15] bei exponentiell gegen 0 gehenden Potentialen q eine Verbesserung von a_0 , B.Simon 1974 [42] verwandte die Methoden von [13], um Satz 0, unter leichter Abschwächung der Voraussetzungen, für gegen ∞ gehendes q zu beweisen. Ideen aus [13] wurden kürzlich von B.Simon 1982[45] (Abschnitt C.3) noch einmal aufgegriffen, wobei recht allgemeine Potentiale betrachtet werden konnten. Auch R.Carmona's schon erwähnter Zugang 1978[10] (vgl. [44], S.267ff) ließ eine große Klasse von Potentialen zu, die Güte der Schranken ist aber unbefriedigend. C.Bardos und M.Mérogot 1975/77[7], [8] konnten in dem Standardfall " q hinreichend glatt, es gibt ein $b>0$, so daß $q(x)-\lambda \geq b$ außerhalb eines Kompaktums" sogar die präexponentiellen Faktoren von h angeben, das

heißt $\hat{h}$ hat die Gestalt $\hat{h}(r) = cr^{\frac{n-1}{2}} e^{-a_0 r}$ mit optimalen $a_0 (= \sqrt{b})$; für gewisse q mit $q(x) \rightarrow \infty$, $|x| \rightarrow \infty$, wurde ein Abklingen der Eigenfunktionen wie e^{-ar^t} mit $t>1$ gefunden. Das letztere Ergebnis hatte B.Simon 1975[43] mit der bereits erwähnten Methode des subharmonischen Vergleichs erhalten.

Diese Methode, für spezielle Lösungen schon von P.Hartman und A.Wintner 1955[18] benutzt, besteht darin, außerhalb einer abgeschlossenen Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ von der Differenz $w := |v| - h$ zu zeigen, daß w dort wo es positiv ist, auch subharmonisch ist, so daß es nach dem Maximumprinzip ein eventuell existierendes positives Supremum auf ∂S

oder in ∞ annimmt. Falls $|v| \leq h$ auf S und $|v(x)| \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow \infty$, gilt, folgt, daß $w \leq 0$ überall ist.

Der Nachweis der Subharmonizität von w gelingt dann, wenn v stetig, $\Delta |v| \geq F|v|$ und $\Delta h \leq Fh$ (die Ungleichungen im Distributionssinn) mit einer Funktion $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ist. Als F kommen solche Funktionen in Frage, für die außerhalb eines Kompaktums $q(x) - \lambda \geq F(x) \geq 0$ erfüllt ist; dann gilt nämlich mit Hilfe der Kato'schen Ungleichung (siehe [27]): $\Delta |v| \geq \text{sign}(v) \Delta v = \text{sign}(v) (q - \lambda) v = (q - \lambda) |v| \geq F|v|$. Da die rechte Seite nichtnegativ ist, folgt hieraus auch mit einer Mittelwertungleichung für subharmonische Funktionen das Abklingen von v gegen 0 schlechthin. " $|v| \leq h$ auf S " schließlich ist entweder bereits bekannt oder im Falle von beschränktem S wegen der Stetigkeit von v und h durch Multiplikation von h mit einer positiven Konstanten zu erreichen.

Die Methode des subharmonischen Vergleichs gestattet in den erwähnten Standardfällen, wo es $b > 0$ und $r \geq 0$ gibt, so daß außerhalb eines Kompaktums $q(x) - \lambda \geq b|x|^{-r}$ gilt, das Auffinden von zum Teil optimalen Schranken und damit eine Verbesserung von Satz 0 für diese Fälle.

Was den Nachteil C von Satz 0 angeht, so beschäftigten sich alle bisher angeführten Arbeiten über quantitatives punktwises Abklingen nur mit Eigenfunktionen zu diskreten Eigenwerten (Ausnahmen bilden lediglich Betrachtungen in [18], sowie ein Ergebnis von S. Albeverio 1972 [6] für N -Körper-Operatoren). Mit der Methode des subharmonischen Vergleichs lassen sich hingegen, wie in [18] schon angedeutet, sogar Resultate finden für einige $\lambda \in \sigma_p(\bar{T}) \setminus \sigma_d(\bar{T})$. Allerdings stellt die Bedingung " $F \geq 0$ " eine unschöne Einschränkung dar, die sich nur schwer überkommen läßt.

In der vorliegenden Arbeit soll daher eine elementare Methode zur Untersuchung des Abklingverhaltens von Eigenfunktionen des Operators T^* angegeben werden, die in den

Standardfällen das optimale a_0 erreicht, für einige Probleme mit $\lambda \in \sigma_p \setminus \sigma_d$ anwendbar ist und die Bedingung

" $q(x) - \lambda \geq 0$ außerhalb eines Kompaktums" nicht benötigt. Man braucht jedoch auch hier eine quantitative Abschätzung von $q(x) - \lambda$ nach unten. In solchen Fällen wo für einen diskreten Eigenwert λ auch weit draußen stets $q(x) - \lambda < 0$ gilt, und ein Satz von M.Klaus 1981[28] (Theorem (2.2)) für die Raumdimension $n=1$ deutet auf die Existenz solcher Beispiele hin (vgl. auch [17]), bleibt Satz 0 von É.É.Šnol' das beste erreichbare Ergebnis.

§2. Abschätzungen für Eigenfunktionen von Operatoren $-\Delta + q$ mit außerhalb eines Kompaktums stetigem q

Im folgenden gelte stets für ein $R_0 > 0$:

(H) $q \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cap C^0(\bar{K}(0, R_0))$, reellwertig.

Ist dann v eine (o.E. reellwertige) Eigenfunktion von T^* zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, so wird in Satz 1, unter geeigneten Voraussetzungen an $q(x) - \lambda$ außerhalb eines Kompaktums, eine Integralabschätzung der Gestalt

$$\exists c_1 > 0 \forall r \geq R_0 + 1: \int_{|y| \geq r} \alpha'(|y|) v^2(y) dy \leq c_1 e^{-2\alpha(r)} \quad (1)$$

bewiesen (die Bedeutung von α und den sogleich auftretenden Größen F , ψ und θ wird später klar).

Falls $u := \alpha'(|\cdot|) v^2$ eine Distributionsungleichung $\Delta u \geq F u$ mit einer bestimmten, eventuell auch negative Werte annehmenden Funktion F erfüllt, so sagt Satz 2 aus, daß

$$\exists c_2 > 0 \forall x \in K(0, 2R_0 + 2): u(x) \leq c_2 |x|^\theta \int_{K(x, \psi(|x|))} u(y) dy \quad (2).$$

Für besonders interessante Fälle werden (1) und (2) in Satz 3 kombiniert zu

$$\begin{aligned} \forall x \in K(0, 2R_0 + 2): \alpha'(|x|) v^2(x) &\leq c_2 |x|^\theta \int_{|y| \geq |x| - \psi(|x|)} \alpha'(|y|) v^2(y) dy \leq \\ &\leq c_1 c_2 |x|^\theta e^{-2\alpha(|x| - \psi(|x|))}, \end{aligned}$$

woraus eine Abschätzung nach oben für $|v(x)|$ folgt.

2.1. Integralabschätzungen

Satz 1: Für ein $R_0 > 0$ sei mit $G := \bar{K}(0, R_0)$: $p \in C^0(G)$ reellwertig. Ferner gebe es eine reellwertige Funktion $\alpha \in C^2([R_0, \infty[)$ mit $\alpha' \geq 0$, so daß

$$\forall x \in G: p(x) \geq \alpha'^2(|x|) - \alpha'(|x|) - \frac{(n-1)(n-3)}{4|x|^2}.$$

Die (reellwertige) Funktion $v \in L_{1,loc}(G)$ erfülle

$$\forall \phi \in C_0^\infty(G): \int_G v(y) (-\Delta + p(y)) \phi(y) dy = 0, \text{ sowie } \alpha'(|\cdot|)^{\frac{1}{2}} v \in L_2(G).$$

Dann gilt: es gibt ein $c > 0$, so daß für alle $r \geq R_0 + 1$:

$$\int_{|y| \geq r} \alpha'(|y|) |v(y)|^2 dy \leq c e^{-2\alpha(r)}.$$

Beweis: A. Lemma 1: Sei $R > 0$, $g \in C^2([R, \infty[)$ reellwertig, $g'' \geq 0$. Dann gilt $(\forall r > R: g'(r) \leq 0)$ oder $g(r) \rightarrow \infty, r \rightarrow \infty$.

Beweis: Es gebe $\tilde{R} > R: g'(\tilde{R}) > 0$.

Mit der Voraussetzung folgt: $\forall s \geq \tilde{R}: g'(s) \geq g'(\tilde{R}) > 0$.

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung liefert:

$$\forall r > \tilde{R} \exists s \geq \tilde{R}: \frac{g(r) - g(\tilde{R})}{r - \tilde{R}} = g'(s) \geq g'(\tilde{R}) > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Daraus ergibt sich: } \forall r \geq \tilde{R}: g(r) &\geq g(\tilde{R}) + (r - \tilde{R}) g'(\tilde{R}) = \\ &\geq (g(\tilde{R}) - \tilde{R} g'(\tilde{R})) + r g'(\tilde{R}) \rightarrow \infty, r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Also ist Lemma 1 bewiesen.

B. Es ist $v \in C^1(G)$.

Dies folgt aus einem Hilfssatz vom Weyl'schen Typ (E. Wienholtz in [19], S.190) wegen der Voraussetzungen an p und v .

C. Behauptung: Sei $\forall r > R_0: f(r) := \frac{1}{2} \int_{|y|=r} v^2(y) d\omega_y - \int_{|y| \geq r} \alpha'(|y|) v^2(y) dy$.

Dann ist $f \in C^2([R_0, \infty[)$, $f' \geq 0$.

Beweis: Zunächst ist f wegen der Voraussetzungen des Satzes und mit B wohldefiniert und stetig.

Für $f_1(r) := \frac{1}{2} \int_{|y|=r} v^2(y) d\omega_y$ gilt: $f_1(r) = \frac{1}{2} r^{n-1} \int_{|\eta|=1} v^2(r\eta) d\omega_\eta$, also

$$f_1(r) = \frac{n-1}{2} r^{n-2} \int_{|\eta|=1} v^2(r\eta) d\omega_\eta + r^{n-1} \int_{|\eta|=1} v(r\eta) \nabla v(r\eta) \cdot n d\omega_\eta =$$

($v \in C^1(G)$ nach B)

$$= \frac{n-1}{2r} \int_{|y|=r} v^2(y) d\omega_y + \int_{|y|=r} v(y) v_v(y) d\omega_y.$$

(v_v := äußere Normale auf $\partial K(0, r)$, v_v := Ableitung von v in Richtung v)

Für $r > R_0$, $f_2(r) := -\int_{|y| \geq r} \alpha'(|y|) v^2(y) dy$ gilt:

$\forall \epsilon > 0$, ϵ klein genug, so daß $f_2(r+\epsilon)$ noch definiert ist:

$$\frac{1}{\epsilon} (f_2(r+\epsilon) - f_2(r)) = \frac{1}{|\epsilon|} \int_{r \leq |y| \leq r+\epsilon} \alpha'(|y|) v^2(y) dy = \frac{1}{\epsilon} \int_r^{r+\epsilon} \alpha'(t) \int_{|y|=t} v^2(y) d\omega_y dt.$$

($r+\epsilon \leq |y| \leq r$ im Falle $\epsilon < 0$)

Da der Integrand des äußeren Integrals stetig ist, folgt mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung:

$$f_2'(r) = \alpha'(r) \int_{|y|=r} v^2(y) d\omega_y.$$

Also ist $f \in C^1([R_0, \infty[)$ mit $f'(r) = (\alpha'(r) + \frac{n-1}{2r}) \int_{|y|=r} v^2(y) d\omega_y + \int_{|y|=r} v(y) v_v(y) d\omega_y$.

Sei $r > R_0$. Für $0 < |\epsilon| < \frac{r-R_0}{2}$, $0 < \mu < \frac{r-R_0}{4}$ ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{|y|=r+\epsilon} v(y) (v_\mu)_v(y) d\omega_y - \int_{|y|=r} v(y) (v_\mu)_v(y) d\omega_y \right) &= \\ &= \frac{1}{|\epsilon|} \int_{r \leq |y| \leq r+\epsilon} \{ v(y) \Delta (v_\mu)(y) + \nabla v(y) \cdot \nabla (v_\mu)(y) \} dy \quad (3) \\ & \quad (r+\epsilon \leq |y| \leq r \text{ im Falle } \epsilon < 0) \end{aligned}$$

($v_\mu := J_\mu * v$ geht aus v durch Friedrichs'sche Glättung hervor (siehe [1], S. 29ff); v ist die äußere Normale auf der jeweiligen Kugeloberfläche).

Nun ist $\forall i \in \{1, \dots, n\} \forall y \in C(K(0, R_0 + 2\mu))$:

$$(v_\mu)_{x_i}(y) = \int_{G_\mu} (y-z) v(z) dz = - \int_{G_\mu} (y-z) v(z) dz = \int_{G_\mu} (y-z) v_{z_i}(z) dz =$$

($v \in C^1(G)$, $J_\mu(y \cdot) \in C_0^\infty(\bar{K}(0, R_0 + \frac{\mu}{2}))$, Partielle Integration, [20], S. 45)

$$= (v_{x_i})_\mu(y),$$

$$\begin{aligned} \text{sowie } \Delta(v_\mu)(y) &= \Delta_Y \left(\int_G J_\mu(y-z) v(z) dz \right) = \int_G \Delta_Y J_\mu(y-z) v(z) dz = \\ &= \int_G \Delta_Z J_\mu(y-z) v(z) dz = \int_G \left(\Delta_Z p(z) \right) J_\mu(y-z) v(z) dz + \int_G J_\mu(y-z) p(z) v(z) dz = \\ &= \int_G J_\mu(y-z) \dot{p}(z) v(z) dz = \{pv\}_\mu(y). \end{aligned}$$

(Voraussetzung an v)

Insgesamt gehen $(v_\mu)_v(y) \rightarrow v_v(y)$,

$$\Delta(v_\mu)(y) \rightarrow p(y) v(y),$$

$$\nabla v(y) \cdot \nabla(v_\mu)(y) + |\nabla v(y)|^2 \text{ gleichmäßig auf}$$

$$\bar{K}(0, r+\epsilon) \setminus K(0, r) \quad (\text{bzw. } \bar{K}(0, r) \setminus K(0, r+\epsilon) \text{ für } \epsilon < 0) \text{ für } \mu \rightarrow 0.$$

Damit wird aus (3):

$$\frac{1}{\epsilon} \left(\int_{|y|=r+\epsilon} v_v(y) v_v(y) d\sigma_Y - \int_{|y|=r} v_v(y) v_v(y) d\sigma_Y \right) = \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{|y|=r} \int_{|y|=t}^{r+\epsilon} \{ p(y) v^2(y) + |\nabla v(y)|^2 \} d\sigma_Y dt \right)$$

und wegen der Stetigkeit von $\{p, \dots\}$ und damit des Integranden des äußeren Integrals folgt wieder

$$\left(\int_{|y|=r} v_v(y) v_v(y) d\sigma_Y \right)'(r) = \int_{|y|=r} p(y) v^2(y) d\sigma_Y + \int_{|y|=r} |\nabla v(y)|^2 d\sigma_Y.$$

Insgesamt ist $f \in C^2([R_0, \infty[)$ und

$$\begin{aligned} f''(r) &= \left(\alpha'(r) - \frac{n-1}{2r^2} + \alpha'(r) \frac{n-1}{r} + \frac{(n-1)^2}{2r^2} \right) \int_{|y|=r} v^2(y) d\sigma_Y + \\ &+ \left(2\alpha'(r) + \frac{n-1}{r} \right) \int_{|y|=r} v(y) v_v(y) d\sigma_Y + \int_{|y|=r} p(y) v^2(y) d\sigma_Y + \int_{|y|=r} |\nabla v(y)|^2 d\sigma_Y \geq \\ &\geq \left(\alpha'(r) + \frac{n-1}{2r} \right)^2 \int_{|y|=r} v^2(y) d\sigma_Y - 2 \left(\alpha'(r) + \frac{n-1}{2r} \right) \int_{|y|=r} |v(y)| |v_v(y)| d\sigma_Y + \\ &\uparrow \\ &(\text{hier geht die Voraussetzung über } p \text{ ein}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \int_{|y|=r} |\nabla v(y)|^2 d\sigma_Y \geq \int_{|y|=r} \left(\left(\alpha'(r) + \frac{n-1}{2r} \right) |v(y)| - |\nabla v(y)| \right)^2 d\sigma_Y \geq 0. \\ &\uparrow \\ &(\forall y: |v_v(y)| \leq |\nabla v(y)|) \end{aligned}$$

D. Behauptung: $\exists R_1 \geq R_0 \forall r > R_1: f(r) \geq 0$.

Beweis: Nach Lemma 1 ist wegen C: $f(r) \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$, und damit die Behauptung richtig, oder $\forall r > R_0: f'(r) \leq 0$ (4).

Wäre nun für ein $\tilde{R} > R_0: f(\tilde{R}) < 0$, so wegen (4): $\forall r \geq \tilde{R}: f(r) \leq f(\tilde{R}) < 0$. Andererseits ist $f(r) \geq -\int_{|y| \geq r} \alpha'(|y|) v^2(y) dy > 0$, $r \rightarrow \infty$, denn nach

Voraussetzung ist $\alpha'(\|\cdot\|)^{\frac{1}{2}}v \in L_2(G)$. Das ergibt einen Widerspruch, also ist die Behauptung in jedem Fall wahr.

$$E. \text{ Sei } \forall r > R_0: \tilde{f}(r) := e^{2\alpha(r)} \int_{|y| \geq r} \alpha'(|y|) v^2(y) dy.$$

Dann ist (wie oben) $\forall r > R_1: \tilde{f}'(r) - 2\alpha'(r) e^{2\alpha(r)} \int_{|y| \geq r} \alpha'(|y|) v^2(y) dy -$

$$- e^{2\alpha(r)} \alpha'(r) \int_{|y|=r} v^2(y) d\sigma_y = -2\alpha'(r) e^{2\alpha(r)} \tilde{f}(r) \leq 0.$$

(nach D und da $\alpha' \geq 0$)

Also ist $\forall r \geq R_1+1: \tilde{f}(r) \leq \tilde{f}(R_1+1)$.

Da $\tilde{f}$ auf (R_0, R_0+1) stetig ist, folgt:

$$\forall r \geq R_0+1: \tilde{f}(r) \leq \max_{R_0+1 \leq s \leq R_1+1} \tilde{f}(s) \leq e^{2\alpha(R_1+1)} \|\alpha'(\|\cdot\|)^{\frac{1}{2}}v\|_{L_2(G)}^2 =: c.$$

Daraus folgt die Behauptung von Satz 1.

2.2. Mittelwertungleichungen

Satz 2: Sei $R_0 > 0$, $G := \bar{K}(0, R_0)$. Außerdem ($\beta \geq 0$ und $0 \leq \delta \leq 1$) oder ($\beta = 0$ und $\delta < 0$). Hiermit erfülle $u \in C^0(G)$, $u \geq 0$,

für alle $\phi \in C_0^\infty(G)$, $\phi \geq 0$, die Ungleichung

$$\int_G u(y) \Delta \phi(y) dy \geq -\beta \int \frac{u(y)}{2^\delta |y|} \phi(y) dy.$$

Dann gilt: es gibt ein $c > 0$, so daß für alle $x \in K(0, 2R_0 + 2)$:

$$u(x) \leq \frac{c}{|x|^{n\delta}} \int_{K(x, \frac{|x|}{2})} u(y) dy.$$

Bemerkungen: 1. Für $\beta = 0$ ist Satz 2 ein Spezialfall der Mittelwertungleichung für subharmonische Funktionen (vgl. [48], S. 76f).

Ein Beispiel für $\beta > 0$ und $\delta = 1$, wo die klassische Mittelwertungleichung nicht anwendbar ist, stellt in $\mathbb{R}^4$ die Funktion $u(x) := |x|^{-1}$ dar; für sie ist nämlich in $\bar{K}(0, 1)$: $\Delta u(x) = -|x|^{-2} u(x) = -|x|^{-3} < 0$, also u nicht subharmonisch, die Voraussetzungen von Satz 2 sind aber mit $\beta = 1$ erfüllt.

Für $\beta > 0$ und $\delta = 0$ entspricht Satz 2 dem Lemma 0.

2. Es gilt unter den Voraussetzungen von Satz 2 möglicherweise auch:

$$\exists c > 0 \forall x \in K(0, 2R_0 + 2): u(x) \leq \frac{c}{|x|^{n+\delta-1}} \int \frac{u(y) dy}{|x| - \frac{|x|}{2} \leq |y| \leq |x| + \frac{|x|}{2}}.$$

Falls u radialsymmetrisch ist, folgt dies ohne allzu großen Aufwand aus Satz 2.

Beweis von Satz 2 für $n \geq 3$:

A. Lemma 2 ($n \geq 3$): a) Es sei $1, \kappa \in \mathbb{N}$, $1 < n$, $\kappa < n$ und $1 + \kappa < n$.

Dann gilt: $\exists c > 0 \forall x, z \in \mathbb{R}^n$, $x \neq z$: $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy}{|x-y|^{1+\kappa} |y-z|^\kappa} \leq \frac{c}{|x-z|^{1+\kappa-n}}.$

b) Es gilt: $\forall r > 0 \forall x, z \in \mathbb{R}^n: \int \frac{dy}{K(x, r) |x-y| |y-z|^{n-2}} \leq 2 \omega_n r.$

c) Es gilt: $\forall r > 0 \forall x, z \in \mathbb{R}^n, x \neq z: \int \frac{dy}{K(x, r) |x-y|^2 |y-z|^{n-2}} \leq \frac{4 \omega_n r}{|x-z|}.$

Beweis: zu a): siehe [20], S.175, Hilfssatz 1.

zu b): $\forall x, z \in \mathbb{R}^n \forall y \in K(x, r) \setminus \{x, z\}: \frac{1}{|x-y| |y-z|^{n-2}} =$
 $= \frac{\chi_{K(x, |y-z|)}(y)}{|x-y| |y-z|^{n-2}} + \frac{\chi_{K(x, |y-z|)}(y)}{|x-y| |y-z|^{n-2}} \leq \frac{1}{|y-z|^{n-1}} + \frac{1}{|x-y|^{n-1}}.$

Nach [20], S.49, Satz 3, existieren die Integrale über y aus $K(x, r)$ der beiden Summanden auf der rechten Seite und sind jeweils kleiner oder gleich $\omega_n r$.

zu c): $\forall x, z \in \mathbb{R}^n \forall y \in K(x, r) \setminus \{x, z\}: \frac{|x-z|}{|x-y|^2 |y-z|^{n-2}} \leq \frac{1}{|x-y| |y-z|^{n-2}} + \frac{1}{|x-y|^2 |y-z|^{n-3}}.$

Die Existenz und oberen Schranken der Integrale über $y \in K(x, r)$ der beiden Summanden auf der rechten Seite weist man wie im Beweis zu b) nach. Damit folgt die Behauptung c).

B. Behauptung: $\forall y \in \mathbb{R}^n, r > 0$ mit $|y| - r \geq R_0 + 1$ und $r \leq \frac{|y|}{2}$:

$$u(y) \leq \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{K(y, r)} u(\xi) d\xi + \frac{3^{2\delta} \beta}{(n-2) \omega_n |y|^{2\delta}} \int_{K(y, r)} \frac{u(z)}{|y-z|^{n-2}} dz.$$

Beweis: Sei $y \in \mathbb{R}^n, r > 0$ mit $|y| - r \geq R_0 + 1, r \leq \frac{|y|}{2}$ und $\mu := \min\{1, r\}$.

Sei $\phi \in C_0^\infty(K(y, \mu)), \phi \geq 0$.

Man betrachtet für $0 < s < r$:

$$\begin{aligned} \int_{K(y, \mu)} s^{1-n} \int_{\partial K(z, s)} u(\xi) d\omega_\xi \phi(z) dz &= \int_{K(y, \mu)} \int_{\partial K(0, 1)} u(z+sn) d\omega_\eta \phi(z) dz = \\ &= \int_{\partial K(0, 1)} \int_{K(y, \mu)} u(z+sn) \phi(z) dz d\omega_\eta = \int_{\partial K(0, 1)} \int_{K(y+sn, \mu)} u(\zeta) \phi(\zeta-sn) d\zeta d\omega_\eta = \\ &\quad \text{(Transformation } \zeta := z+sn) \\ &= \int_G u(\zeta) \int_{\partial K(0, 1)} \phi(\zeta-sn) d\omega_\eta d\zeta, \end{aligned}$$

$$\text{Daraus folgt: } \frac{\partial}{\partial s} \left[\int_{K(Y, \mu)} s^{1-n} \int_{\partial K(z, s)} u(\xi) d\omega_{\xi} \phi(z) dz \right] =$$

$$= \int_G u(\zeta) \frac{\partial}{\partial s} \left[\int_{\partial K(0, 1)} \phi(\zeta + s\eta) d\omega_{\eta} \right] d\zeta = \int_G u(\zeta) \int_{\partial K(0, 1)} \eta \cdot \nabla \phi(\zeta + s\eta) d\omega_{\eta} d\zeta =$$

$$= \int_G u(\zeta) s^{1-n} \int_{\partial K(\zeta, s)} \frac{\xi - \zeta}{|\xi - \zeta|} \cdot \nabla \phi(\xi) d\omega_{\xi} d\zeta = s^{1-n} \int_G u(\zeta) \int_{K(\zeta, s)} \Delta \phi(\xi) d\xi d\zeta =$$

(Gauß'scher Satz, [20], S.45)

$$= s^{1-n} \int_G u(\zeta) \int_{K(0, s)} \Delta \phi(z + \zeta) dz d\zeta = s^{1-n} \int_{K(0, s)} \int_G u(\zeta) \Delta \phi(z + \zeta) d\zeta dz \geq$$

(Transformation $z := \xi - \zeta$)

$$\geq -\beta s^{1-n} \int_{K(0, s)} \int_{G \setminus |z| \geq 2\delta} \frac{u(\zeta)}{|z + \zeta|^{2\delta}} \phi(z + \zeta) d\zeta dz = -\beta s^{1-n} \int_{K(0, s)} \int_{K(Y, \mu + r)} \frac{u(\zeta)}{|z|^{2\delta}} \phi(z + \zeta) d\zeta dz$$

(nach Voraussetzung, da $\phi(z + \cdot) \in C_0^{\infty}(G)$, $\phi(z + \cdot) \geq 0$)

$$\geq -3^{2\delta} \beta s^{1-n} \int_{K(0, s)} \int_{K(Y, \mu + r)} \frac{u(\zeta)}{|z + \zeta|^{2\delta}} \phi(z + \zeta) d\zeta dz =$$

(es ist $|z + \zeta| \leq |z| + |\zeta| \leq r + |\zeta| \leq 2|Y| - 2r - 2\mu + |\zeta| \leq 3|\zeta| \Rightarrow$ Ungleichung für $(\beta \geq 0$ und $0 \leq \delta \leq 1)$; für $(\beta = 0$ und $\delta < 0)$ ist sie sowieso richtig)

$$= -3^{2\delta} \beta s^{1-n} \int_{K(0, s)} \int_{K(z + Y, \mu + r)} \frac{\phi(\xi)}{|\xi|^{2\delta}} u(\xi - z) d\xi dz =$$

(Transformation $\xi := z + \zeta$)

$$= -3^{2\delta} \beta s^{1-n} \int_{K(Y, \mu)} \frac{\phi(\xi)}{|\xi|^{2\delta}} \int_{K(0, s)} u(\xi - z) dz d\xi =$$

$$= -3^{2\delta} \beta s^{1-n} \int_{K(Y, \mu)} \frac{\phi(\xi)}{|\xi|^{2\delta}} \int_{K(\xi, s)} u(\zeta) d\zeta d\xi =$$

(Transformation $\zeta := \xi - z$)

$$= - \int_{K(Y, \mu)} \frac{3^{2\delta} \beta}{|\xi|^{2\delta}} s^{1-n} \int_{K(\xi, s)} u(\zeta) d\zeta \phi(\xi) d\xi =$$

$$= - \frac{\partial}{\partial s} \left[\int_{K(Y, \mu)} \frac{3^{2\delta} \beta}{|\xi|^{2\delta}} s \int_0^{1-n} \int_{K(\xi, t)} u(\xi) d\zeta dt \phi(\xi) d\xi \right] =$$

(man überzeuge sich von der Existenz des Integrals $\int \dots dt$)

$$= - \frac{\partial}{\partial s} \left[\int_{K(Y, \mu)} \frac{3^{2\delta} \beta}{|z|^{2\delta}} \int_0^s t^{1-n} \int_{K(z, t)} u(\xi) d\xi dt \phi(z) dz \right].$$

Für $\Omega:]0, r[\times K(y, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Omega(s, z) := s^{1-n} \int_{\partial K(z, s)} u(\xi) d\sigma_\xi + \frac{3^{2\delta} \beta s}{|z|^{2\delta}} \int_0^t s^{1-n} \int_{K(z, t)} u(\xi) d\xi dt,$$

ist damit gezeigt: $\forall 0 < s < r: \frac{\partial}{\partial s} \left[\int_{K(y, \mu)} \Omega(s, z) \phi(z) dz \right] \geq 0$, also

$$\forall 0 < \varepsilon < s < r: \int_{K(y, \mu)} \Omega(s, z) \phi(z) dz \geq \int_{K(y, \mu)} \Omega(\varepsilon, z) \phi(z) dz.$$

$$\text{Daraus folgt: } \forall 0 < \varepsilon < s < r: \int_{K(y, \mu)} (\Omega(s, z) - \Omega(\varepsilon, z)) \phi(z) dz \geq 0 \quad (5).$$

Wäre nun für ein solches Paar $(\varepsilon, s): \Omega(s, y) < \Omega(\varepsilon, y)$, so gäbe es $0 < \mu_1 < \mu$ mit $\forall z \in K(y, \mu_1): (\Omega(s, z) - \Omega(\varepsilon, z)) < 0$.

Sei $\phi \in C_0^\infty(K(y, \mu_1)) \setminus \{0\}$, $\phi \geq 0$ (so etwas existiert!), dann wäre $\int_{K(y, \mu)} (\Omega(s, z) - \Omega(\varepsilon, z)) \phi(z) dz < 0$, im Widerspruch zu (5).

Also ist $\forall 0 < \varepsilon < s < r: \Omega(s, y) \geq \Omega(\varepsilon, y)$.

Wegen der Stetigkeit von u geht $\frac{1}{\omega_n} \Omega(\varepsilon, y)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen $u(y)$

$$\left(\text{das folgt aus } \left| \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial K(y, \varepsilon)} u(\xi) d\sigma_\xi - u(y) \right| \leq \frac{\varepsilon}{\omega_n} \int_{\partial K(y, \varepsilon)} |u(\xi) - u(y)| d\sigma_\xi \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Also ist } \forall 0 \leq s \leq r: s^{n-1} u(y) &\leq \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial K(y, s)} u(\xi) d\sigma_\xi + \\ &+ \frac{3^{2\delta} \beta s^{n-1}}{\omega_n |y|^{2\delta}} \int_0^s s^{1-n} \int_{K(y, t)} u(\xi) d\xi dt = \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial K(y, s)} u(\xi) d\sigma_\xi + \frac{3^{2\delta} \beta}{(n-2) \omega_n |y|^{2\delta}} s^{n-1} \int_0^s (t^{2-n} - s^{2-n}) \int_{\partial K(y, t)} u(\xi) d\sigma_\xi dt \leq \end{aligned}$$

(Partielle Integration; auch hier überzeuge man sich von der Existenz der Integrale. Im Falle $n=2$ lautet diese Zeile:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial K(y, s)} u(\xi) d\sigma_\xi + \frac{3^{2\delta} \beta s}{2\pi |y|^{2\delta}} \int_0^s (\ln s - \ln t) \int_{\partial K(y, t)} u(\xi) d\sigma_\xi dt, \text{ siehe unten})$$

$$\leq \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial K(y, s)} u(\xi) d\sigma_\xi + \frac{3^{2\delta} \beta}{(n-2) \omega_n |y|^{2\delta}} s^{n-1} \int_{K(y, r)} \frac{u(\xi)}{|y - \xi|^{n-2}} d\xi.$$

Integration über s von 0 bis r ergibt:

$$\frac{r^n}{n} u(y) \leq \frac{1}{\omega_n} \int_{K(y,r)} u(\xi) d\xi + \frac{3^{2\delta} \beta r^n}{n(n-2) \omega_n |y|^{2\delta}} \int_{K(y,r)} \frac{u(\xi)}{|y-\xi|^{n-2}} d\xi.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Der Fall " $\beta=0$ und $\delta < 0$ " ist hiermit schon erledigt:

man setze $y:=x$ und $r:=\frac{|x|^\delta}{2}$ (es ist $|x|-r \geq |x|-\frac{1}{2} \geq R_0+1$,

$r \leq \frac{1}{2} \leq \frac{|x|}{2}$). Im folgenden sei also $\beta \geq 0$ und $0 \leq \delta \leq 1$.

C. Behauptung: $\forall j \in \mathbb{N}, j < \frac{n}{2} \exists c_j, d_j > 0 \forall x \in K(0, 2R_0+2)$:

$$u(x) \leq \frac{c_j}{|x|^{n\delta}} \int_{K(x, \frac{j}{n+2}|x|^\delta)} u(\xi) d\xi + \frac{d_j}{|x|^{2j\delta}} \int_{K(x, \frac{j}{n+2}|x|^\delta)} \frac{u(y)}{|x-y|^{n-2j}} dy.$$

Beweis: Sei $r:=\frac{|x|^\delta}{n+2}$.

Für $j=1$ sei $y:=x$; dann folgt die Behauptung aus B (es

ist $|x|-r = |x| - \frac{|x|^\delta}{n+2} \geq \frac{n+1}{n+2} |x| \geq \frac{|x|}{2} \geq R_0+1$, $r \leq \frac{|x|}{n+2} \leq \frac{|x|}{2}$).

($|x| \geq 1$, $\delta \leq 1$)

Sei die Behauptung richtig für $1 \leq j < \frac{n}{2}-1$.

Dann ist $\forall y \in K(x, \frac{j}{n+2}|x|^\delta)$: $|y|-r \geq |x| - \frac{j+1}{n+2} |x|^\delta \geq \frac{|x|}{2} \geq R_0+1$

und $r \leq \frac{|x|}{n+2} \leq \frac{|x|}{4} \leq \frac{|y|}{2}$, also nach B:

$$u(y) \leq \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{K(y,r)} u(\xi) d\xi + \frac{3^{2\delta} \beta}{(n-2) \omega_n |y|^{2\delta}} \int_{K(y,r)} \frac{u(z)}{|y-z|^{n-2}} dz.$$

Mit der Induktionsvoraussetzung ist:

$$\begin{aligned} u(x) &\leq \frac{c_j}{|x|^{n\delta}} \int_{K(x, \frac{j}{n+2}|x|^\delta)} u(\xi) d\xi + \frac{d_j n}{\omega_n r^n |x|^{2j\delta}} \int_{K(x, \frac{j}{n+2}|x|^\delta)} \frac{|x-y|^{2j-n}}{K(y,r)} \int_{K(y,r)} u(\xi) d\xi dy + \\ &+ \frac{3^{2\delta} \beta d_j}{(n-2) \omega_n |x|^{2j\delta}} \int_{K(x, \frac{j}{n+2}|x|^\delta)} \frac{|x-y|^{2j-n}}{|y|^{2\delta}} \int_{K(y,r)} \frac{u(z)}{|y-z|^{n-2}} dz dy \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{c_j}{|x|^{n\delta}} \int_{K(x, \frac{j}{n+2}|x|^\delta)} u(\xi) d\xi + \frac{d_j^{2j} n}{\omega_n r^n |x|^{2j\delta}} \int_{K(x, \frac{j+1}{n+2}|x|^\delta)} u(\xi) \left\{ \int \frac{dy}{|x-y|^{n-2j}} \right\} d\xi +$$

↑
(K(y, r) ⊂ K(x, \frac{j+1}{n+2}|x|^\delta) und |y|^{2\delta} \geq 2^{-2\delta} |x|^{2\delta})

$$+ \frac{6^{2\delta} \beta d_j}{(n-2) \omega_n |x|^{2(j+1)\delta}} \int_{K(x, \frac{j+1}{n+2}|x|^\delta)} u(z) \left\{ \int \frac{dy}{|x-y|^{n-2j}} \frac{1}{|y-z|^{n-2}} \right\} dz \leq$$

$$\leq \frac{c_j}{|x|^{n\delta}} \int_{K(x, \frac{j+1}{n+2}|x|^\delta)} u(\xi) d\xi + \frac{j^{2j} d_j^{2j} n}{2^j r^n (n+2)^{2j}} \int_{K(x, \frac{j+1}{n+2}|x|^\delta)} u(\xi) d\xi +$$

↑

(es ist $n-2j+n-2 > n-n+2+n-2 = n$, also Lemma 2a) anwendbar;
man überzeuge sich von der Existenz des Integrals $\int \dots dz$)

$$+ \frac{6^{2\delta} \beta d_j c(n, j)}{(n-2) \omega_n |x|^{2(j+1)\delta}} \int_{K(x, \frac{j+1}{n+2}|x|^\delta)} \frac{u(z)}{|x-z|^{n-2(j+1)}} dz.$$

Daraus folgt die Behauptung für $j+1$ mit $c_{j+1} := \frac{j^{2j} d_j^{2j} n (n+2)^{n-2j}}{2^j} + c$.

$$\text{und } d_{j+1} := \frac{6^{2\delta} \beta d_j c(n, j)}{(n-2) \omega_n}.$$

D. Behauptung: $\exists c', d' > 0 \forall x \in (K(0, 2R_0 + 2)) :$

$$u(x) \leq \frac{c'}{|x|^{n\delta}} \int_{K(x, \frac{n}{2(n+2)}|x|^\delta)} u(\xi) d\xi + \frac{d'}{|x|^{(n-1)\delta}} \int_{K(x, \frac{n}{2(n+2)}|x|^\delta)} \frac{u(y)}{|x-y|} dy.$$

Beweis: Für n ungerade folgt dies aus C mit $j := \frac{n-1}{2}$.

Für n gerade setzt man in C: $j := \frac{n}{2} - 1$, und ein weiterer

"Induktionsschritt" führt zu:

$$u(x) \leq \frac{c'}{|x|^{n\delta}} \int_{K(x, \frac{n}{2(n+2)}|x|^\delta)} u(\xi) d\xi + \frac{d'}{|x|^{n\delta}} \int_{K(x, \frac{n}{2(n+2)}|x|^\delta)} u(z) \left\{ \int \frac{dy}{|x-y|^2 |y-z|^{n-2}} \right\} dz +$$

$K(x, \frac{n-2}{2(n+2)}|x|^\delta)$

$$\leq \frac{c'}{|x|^{n\delta}} \int_{K(x, \frac{n}{2(n+2)} |x|^\delta)} u(\xi) d\xi + \frac{4\omega_n (n-2)^\delta}{2(n+2) |x|^{(n-1)\delta}} \int_{K(x, \frac{n}{2(n+2)} |x|^\delta)} \frac{u(z)}{|x-z|} dz.$$

(Lemma 2c); man überzeuge sich von der Existenz des Integrals $\int \dots dz$)

Das ist die Behauptung mit $d' := \frac{2\omega_n (n-2)^\delta}{n+2}$.

E. In den Ausdruck der Behauptung D setze man den der Behauptung aus B mit $r := \frac{|x|^\delta}{n+2}$ noch einmal ein (ist immer noch erlaubt!) und erhält:

$$u(x) \leq \frac{c''}{|x|^{n\delta}} \int_{K(x, \frac{|x|^\delta}{2})} u(\xi) d\xi + \frac{d''}{|x|^{(n+1)\delta}} \int_{K(x, \frac{|x|^\delta}{2})} \left\{ \int_{K(x, \frac{n}{2(n+2)} |x|^\delta)} \frac{dy}{|x-y||y-z|^{n-2}} \right\} dz$$

$$\leq \frac{c''}{|x|^{n\delta}} \int_{K(x, \frac{|x|^\delta}{2})} u(\xi) d\xi + \frac{2\omega_n d'' n}{2(n+2) |x|^{n\delta}} \int_{K(x, \frac{|x|^\delta}{2})} u(z) dz.$$

(Lemma 2b))

Hieraus folgt die Behauptung des Satzes mit $c := c'' + \frac{\omega_n d'' n}{n+2}$.

Beweis von Satz 2 für $n=2$: Wie in B des Beweises für $n \geq 3$ folgt:

$\forall y \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ mit $|y| - r \geq R_0 + 1$ und $r \leq \frac{|y|}{2}$:

$$u(y) \leq \frac{c}{r^2} \int_{K(y, r)} u(\xi) d\xi + \frac{d\beta}{|y|^{2\delta}} \int_{K(y, r)} (\ln r - \ln |y-z|) u(z) dz$$

(die Existenz des Integrals $\int \dots dz$ sieht man mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital ein).

Im Falle " $\beta=0$ und $\delta < 0$ " folgt die Behauptung des Satzes wieder unmittelbar.

Sonst gilt mit $r := \frac{|x|^\delta}{4}$: $\forall x \in (K(0, 2R_0+2))$:

$$u(x) \leq \frac{c_1}{|x|^{2\delta}} \int_{K(x, \frac{|x|^\delta}{4})} u(\xi) d\xi + \frac{d_1}{|x|^{2\delta}} \int_{K(x, \frac{|x|^\delta}{4})} (\ln \frac{|x|^\delta}{4} - \ln |x-y|) u(y) dy \leq$$

$$\leq \frac{c_1}{|x|^{2\delta}} \int u(\xi) d\xi + \frac{c_1}{|x|^{4\delta}} \int u(\xi) \left\{ \int (\ln \frac{|x|^\delta}{4} - \ln |x-y|) dy \right\} d\xi + \\ + \frac{c_1}{|x|^{4\delta}} \int u(z) \left\{ \int (\ln \frac{|x|^\delta}{4} - \ln |x-y|) \left\{ \int (\ln \frac{|x|^\delta}{4} - \ln |y-z|) dy \right\} dz \right\} \\ K(x, \frac{|x|^\delta}{4}) K(x, \frac{|x|^\delta}{2}) K(x, \frac{|x|^\delta}{4})$$

Es ist formal (man überzeuge sich, wo nötig, durch Grenzübergänge von der Existenz der Integrale):

$$\int \ln \frac{r}{|x-y|} dy = \int \ln \frac{r}{|y|} dy = r^2 \int \ln \frac{1}{|y|} dy = -r^2 \int \ln |y| dy = \\ = -2\pi r^2 \int_0^1 t \ln t dt = -\pi r^2 [t^2 \ln t]_0^1 + \pi r^2 \int_0^1 t dt = \frac{\pi}{2} r^2 \quad (7).$$

(Regeln von de l'Hospital)

Außerdem ist $\forall \zeta \in \mathbb{R}^n$: $\int_{K(0,1)} (\ln \frac{1}{|y-\zeta|})^2 dy = \int_{K(0,1)} (\ln |y-\zeta|)^2 dy =$

$$= \int_{K(\zeta,1)} (\ln |y|)^2 dy \leq \int_{K(0,1)} (\ln |y|)^2 dy + \int_{K(\zeta,1) \setminus K(0,1)} (\ln |y|)^2 dy \leq$$

$$\leq \int_{K(0,1)} (\ln |y|)^2 dy + (\ln(|\zeta|+1))^2 \pi$$

und $\int_{K(0,1)} (\ln |y|)^2 dy = 2\pi \int_0^1 t (\ln t)^2 dt = \pi [t^2 (\ln t)^2]_0^1 - 2\pi \int_0^1 t \ln t dt = \frac{\pi}{2},$

(wie oben)

so daß $\int_{K(x,r)} |\ln \frac{r}{|x-y|}| |\ln \frac{r}{|y-z|}| dy = \int_{K(0,r)} |\ln \frac{r}{|y|}| |\ln \frac{r}{|y-(x-z)|}| dy =$

$$= r^2 \int_{K(0,1)} |\ln \frac{1}{|y|}| |\ln \frac{1}{|y-\frac{x-z}{r}|}| dy \leq r^2 \left(\int_{K(0,1)} (\ln \frac{1}{|y|})^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{K(0,1)} (\ln \frac{1}{|y-\frac{x-z}{r}|})^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

(Schwarz'sche Ungleichung)

$$\leq r^2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2} + (\ln(\frac{|x-z|}{r} + 1))^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

In der Situation von (6) war $|x-z| \leq \frac{|x|^\delta}{2}$ und $r = \frac{|x|^\delta}{4}$, so daß

$$0 \leq \frac{|x-z|}{r} \leq 2 \text{ und daher } \int_{K(x,r)} |\ln \frac{r}{|x-y|}| |\ln \frac{r}{|y-z|}| dy \leq c r^2 \quad (8).$$

Aus (6) folgt nun mit (7) und (8) die Behauptung von Satz 2 für $n=2$.

2.3. Punktweise Schranken für Eigenfunktionen

Satz 3: Für $k \in \{1, 2, 3\}$ erfülle q_k die Bedingung (II)

(also $q_k \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cap C^0(\bar{K}(0, R_0))$, reellwertig, $R_0 > 0$;

$\lambda_k \in \sigma_p(T_k^*)$ reell.

Es gelte für alle $x \in \bar{K}(0, R_0)$:

1) $q_1(x) - \lambda_1 \geq b_1 |x|^\tau$ mit einem $b_1 > 0$ und einem $\tau > -2$;

2) $q_2(x) - \lambda_2 \geq b_2 |x|^{-2}$ mit einem $b_2 \geq -\frac{(n-1)(n-3)}{4}$;

3) $q_3(x) - \lambda_3 \geq 1 + \cos 3|x| + \frac{1}{4} \cos^2 3|x| + \frac{3}{2} \sin 3|x| - \frac{(n-1)(n-3)}{4|x|^2}$.

Dann gilt für jede Eigenfunktion v_k von T_k^* zu λ_k :

es gibt ein $c_{(\epsilon)} > 0$, so daß für alle $x \in K(0, R_0 + 1)$:

1) $|v_1(x)| \leq c_{\epsilon} |x|^{\frac{\tau(n-2)}{4} + \epsilon} e^{-\frac{2\sqrt{b_1}}{\tau+2}|x|^{\frac{\tau+2}{2}}}$, wobei
 $\epsilon = 0$, falls $\tau \leq 2n-6$,
 $\epsilon > 0$ beliebig, falls $\tau > 2n-6$;

2) $|v_2(x)| \leq c |x|^{-\frac{n-2}{2} - \sqrt{b_2 + (\frac{n-2}{2})^2}}$;

3) $|v_3(x)| \leq c e^{-|x|}$.

Bemerkungen: 1. Wenn die Aussage in der Bemerkung 2 nach Satz 2 zutrifft (also z.B. für radialsymmetrisches v), folgt sogar:

1) $|v_1(x)| \leq c_{\epsilon} |x|^{\frac{1}{2}(1-\frac{\tau}{2}-n) + \epsilon} e^{-\frac{2\sqrt{b_1}}{\tau+2}|x|^{\frac{\tau+2}{2}}}$;

3) $|v_3(x)| \leq c |x|^{-\frac{n-1}{2}} e^{-|x|}$.

2. Die Methode von Satz 3 ergibt schon ein Resultat, falls v nichtnotwendig in L_2 liegt, sondern Lösung in dem (in manchen Fällen schwächeren) Sinn von Satz 1 ist.

3. Im Falle 2) von Satz 3 sollte man für $-\infty < b_2 < 1 - (\frac{n-2}{2})^2$

und $v \in L_2(\mathbb{R}^n)$ dagegen schließen:

$$\int_{|y| \geq r} v^2(y) dy \lesssim \frac{1}{r^{\frac{n}{2}}} \quad (\text{mit Satz 2}) \quad |v(x)| \leq c|x|^{\frac{n}{2}}.$$

Beweis von Satz 3: A. Lemma 3: Es seien die Voraussetzungen

von Satz 1 erfüllt, zusätzlich $\alpha \in C^\infty([R_0, \infty[)$, $\alpha' > 0$.

Dann gilt für $u := \alpha'(|\cdot|) v^2$:

$$\forall \phi \in C_0^\infty(G), \quad \phi \geq 0: \quad \int_G u(y) \Delta \phi(y) dy \geq \int_G \left\{ 2\alpha'^2(|y|) - 2\alpha''(|y|) - \frac{(n-1)(n-3)}{2|y|^2} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha'''}{\alpha'} \frac{|y|}{|y|} + \frac{n-1}{|y|} \frac{\alpha''}{\alpha'} \frac{|y|}{|y|} - 2 \frac{\alpha'^2}{\alpha'^2} \frac{|y|}{|y|} \right\} u(y) \phi(y) dy.$$

Beweis: Sei $\phi \in C_0^\infty(G)$, $\phi \geq 0$.

$$\text{Dann ist } \int_G u(y) \Delta \phi(y) dy = \int_G \alpha'(|y|) v^2(y) \Delta \phi(y) dy =$$

$$= \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_G \alpha'(|y|) v(y) v_\mu(y) \Delta \phi(y) dy =$$

($v \rightarrow v_\mu$ Friedrichs'sche Glättung (siehe oben); $v \in C^1(G)$, siehe Beweis von Satz 1, B)

$$= \lim_{\mu \rightarrow 0} \left\{ \int_G v(y) \Delta (\alpha'(|\cdot|) v_\mu \phi)(y) dy - \int_G v(y) \Delta (\alpha'(|y|)) v_\mu(y) \phi(y) dy - \right.$$

(man berechne $\Delta (\alpha'(|\cdot|) v_\mu \phi)(y)$)

$$- 2 \int_G v(y) \nabla (\alpha'(|y|)) \cdot \nabla (v_\mu)(y) \phi(y) dy - 2 \int_G v(y) v_\mu(y) \nabla (\alpha'(|y|)) \cdot \nabla \phi(y) dy -$$

$$- \int_G v(y) \alpha'(|y|) \Delta (v_\mu)(y) \phi(y) dy - 2 \int_G v(y) \alpha'(|y|) \nabla (v_\mu)(y) \cdot \nabla \phi(y) dy =$$

$$= \lim_{\mu \rightarrow 0} \left\{ \int_G p(y) v(y) \alpha'(|y|) v_\mu(y) \phi(y) dy - \int_G v(y) \Delta (\alpha'(|y|)) v_\mu(y) \phi(y) dy - \right.$$

(nach Voraussetzung, da $\alpha'(|\cdot|) v_\mu \phi \in C_0^\infty(G)$, sowie mit partieller Integration)

$$- 2 \int_G v(y) \nabla (\alpha'(|y|)) \cdot \nabla (v_\mu)(y) \phi(y) dy + 2 \int_G v_\mu(y) \nabla v(y) \cdot \nabla (\alpha'(|y|)) \phi(y) dy +$$

$$+ 2 \int_G v(y) \nabla (v_\mu)(y) \cdot \nabla (\alpha'(|y|)) \phi(y) dy + 2 \int_G v(y) v_\mu(y) \Delta (\alpha'(|y|)) \phi(y) dy -$$

$$- \int_G v(y) \alpha'(|y|) \Delta (v_\mu)(y) \phi(y) dy + 2 \int_G \alpha'(|y|) \nabla v(y) \cdot \nabla (v_\mu)(y) \phi(y) dy +$$

$$+ 2 \int_G v(y) \nabla (\alpha'(|y|)) \cdot \nabla (v_\mu)(y) \phi(y) dy + 2 \int_G v(y) \alpha'(|y|) \Delta (v_\mu)(y) \phi(y) dy =$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} 2 \int_G \rho(y) \alpha'(|y|) v^2(y) \phi(y) dy + \int_G \Delta(\alpha'(|y|)) v^2(y) \phi(y) dy +$$

(wegen der Eigenschaften der Friedrichs'schen Glättung (vgl. oben); die Integrale erstrecken sich effektiv nur über ein Kompaktum)

$$+ 4 \int_G v(y) \nabla v(y) \cdot \nabla(\alpha'(|y|)) \phi(y) dy + 2 \int_G \alpha'(|y|) |\nabla v(y)|^2 \phi(y) dy \geq$$

$$\stackrel{\uparrow}{\geq} \int_G \{ 2\alpha'^2(|y|) - 2\alpha''(|y|) - \frac{(n-1)(n-3)}{2|y|^2} + \frac{\Delta(\alpha'(|y|))}{\alpha'(|y|)} -$$

$$- \frac{2|\nabla(\alpha'(|y|))|^2}{\alpha'^2(|y|)} \} u(y) \phi(y) dy =$$

(man braucht die Voraussetzungen, sowie die Ungleichung

$$2|v(y)| |\nabla v(y)| |\nabla(\alpha'(|y|))| \phi(y) \leq$$

$$\leq |\nabla v(y)|^2 \alpha'(|y|) \phi(y) + \frac{|\nabla(\alpha'(|y|))|^2}{\alpha'^2(|y|)} v^2(y) \phi(y),$$

die für $|v(y)|=0$ trivial ist und sonst aus

$$0 \leq \left(\frac{\alpha'(|y|)}{|v(y)|} \right)^{\frac{1}{2}} |\nabla v(y)| - \left(\frac{|v(y)|}{\alpha'(|y|)} \right)^{\frac{1}{2}} |\nabla(\alpha'(|y|))| \}^2 =$$

$$\leq \frac{\alpha'(|y|)}{|v(y)|} |\nabla v(y)|^2 - 2 |\nabla v(y)| |\nabla(\alpha'(|y|))| + \frac{|v(y)|}{\alpha'(|y|)} |\nabla(\alpha'(|y|))|^2$$

folgt)

$$= \int_G \{ 2\alpha'^2(|y|) - 2\alpha''(|y|) - \frac{(n-1)(n-3)}{2|y|^2} + \frac{\alpha''(|y|)}{\alpha'(|y|)} + \frac{n-1}{|y|} \frac{\alpha'(|y|)}{\alpha'(|y|)} -$$

$$- \frac{2\alpha'^2(|y|)}{\alpha'^2(|y|)} \} u(y) \phi(y) dy.$$

B. zu 1): (der Index "1" wird weggelassen)

$$\text{Sei } \forall r > R_0: \alpha(r) := \frac{2\sqrt{b}}{r+2} r^{\frac{r+2}{2}} + \left(\frac{1}{4} - \epsilon\right) \ln r \text{ mit } \epsilon=0, \text{ falls } r \leq 2n-6,$$

$$\epsilon > 0, \text{ falls } r > 2n-6.$$

$$\text{Dann ist } \alpha'(r) = \sqrt{b} r^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4} - \epsilon}{r} \quad (\text{man vergrößere eventuell } R_0)$$

$$\text{zu } \tilde{R}_0, \text{ damit } \alpha'(r) \geq \frac{1}{2} \sqrt{b} r^{\frac{1}{2}} > 0 \quad \forall r > \tilde{R}_0 \quad (r > 2l),$$

$$\alpha''(r) = -\frac{1}{2} \sqrt{b} r^{-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{4} - \epsilon}{r^2}, \quad \alpha'''(r) = \frac{1}{4} \sqrt{b} r^{-\frac{3}{2}} + \frac{\frac{1}{4} - \epsilon}{r^3}.$$

Damit ist $\forall x \in (\bar{K}(0, \hat{R}_0) : \alpha'^2(|x|) - \alpha'(|x|) - \frac{(n-1)(n-3)}{4|x|^2} =$

$$= b|x|^{\tau} + 2\sqrt{b}\left(\frac{\tau}{4} - \epsilon\right)|x|^{\frac{\tau-2}{2}} + \frac{(\frac{\tau}{4} - \epsilon)^2}{|x|^2} - \frac{\tau-2}{2}\sqrt{b}|x|^{\frac{\tau-2}{2}} + \frac{\frac{\tau}{4} - \epsilon}{|x|^2} - \frac{(n-1)(n-3)}{4|x|^2} =$$

$$= b|x|^{\tau} - 2\sqrt{b}\epsilon|x|^{\frac{\tau-2}{2}} + \left\{ \left(\frac{\tau}{4} - \epsilon\right)^2 + \left(\frac{\tau}{4} - \epsilon\right) - \frac{(n-1)(n-3)}{4} \right\} |x|^{-2} \leq$$

$$\leq b|x|^{\tau} \leq q(x) - \lambda =: p(x) \quad (9).$$

(für $\tau \leq 2n-6$ und $\epsilon=0$ ist $\{\dots\} \leq 0$; für $\tau > 2n-6$ und $\epsilon > 0$ über-

wiegt der $|x|^{\frac{\tau-2}{2}}$ -Term gegenüber dem $|x|^{-2}$ -Term (eventuell erneute Vergrößerung von $\hat{R}_0$))

Für $\tau \leq 0$ ist $\alpha'(r)$ beschränkt und damit $\alpha'(|\cdot|)^{\frac{1}{2}} \in L_2((\bar{K}(0, \hat{R}_0))$

Für $\tau > 0$ folgt aus der Voraussetzung $q(x) - \lambda \geq b|x|^{\tau}$ auch $q(x) - \lambda \geq b$ (o.E. $\hat{R}_0 \geq 1$); man führe also hier zunächst den Beweis des Satzes für $\tau=0$ durch und sieht dann, daß

$\alpha'(|\cdot|)^{\frac{1}{2}} \in L_2((\bar{K}(0, \hat{R}_0))$ gilt. Mit (9) ist Satz 1 anwendbar und ergibt:

$$\exists c_1 > 0 \forall r \geq \hat{R}_0 + 1: \int_{|y| \geq r} \alpha'(|y|) v^2(y) dy \leq c_1 e^{-2\alpha(r)} \quad (10).$$

Auch Lemma 3 ist anwendbar, wobei die geschweifte Klammer in der dortigen Aussage für dieses α (nach eventuell erneuter Vergrößerung von $\hat{R}_0$) größer oder gleich 0 ist, wie man durch Nachrechnen sieht.

Es gilt also für $u := \alpha'(|\cdot|) v^2$:

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\bar{K}(0, \hat{R}_0)), \phi \geq 0: \int_{\bar{K}(0, \hat{R}_0)} u(y) \Delta \phi(y) dy \geq 0, \text{ so daß Satz 2}$$

(mit $\beta := 0, \delta := -\frac{1}{2}$) ergibt:

$$\exists c_2 > 0 \forall x \in (K(0, 2\hat{R}_0 + 2): u(x) \leq c_2 |x|^{\frac{n-1}{2}} \int_{K(x, \frac{|x|}{2})} u(y) dy.$$

Hieraus folgt (da $\alpha'(r) \geq \frac{1}{2}\sqrt{b}r^{\frac{1}{2}}$): $\forall x \in (K(0, 2\sqrt{b}R_0+2))$:

$$|v(x)| \leq \tilde{c}_2 |x|^{\frac{(n-1)}{4}} \left(\int_{|y| \geq |x| - \frac{|x|}{2}} \alpha'(|y|) v^2(y) dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sqrt{c_1} \tilde{c}_2 |x|^{\frac{(n-1)}{4}} e^{-\frac{2\sqrt{b}}{r+2}(|x| - \frac{|x|}{2})^{\frac{r+2}{2}}} (|x| - \frac{|x|}{2})^{-\frac{r}{2} - \frac{1}{4} + \varepsilon} \leq$$

↖
(10) mit $r := |x| - \frac{|x|}{2} \geq \sqrt{b}R_0+1$

$$\leq c |x|^{\frac{(n-2)}{4} + \varepsilon - \frac{2\sqrt{b}}{r+2}|x|^{\frac{r+2}{2}}}, \text{ mit geeignetem } c > 0.$$

↖ (nach de l'Hospital geht $s^t \{(1 - \frac{s^{-t}}{2})^t - 1\}$ gegen $-\frac{t}{2}$ für $s \rightarrow \infty$ ($t > 0$),
so daß (mit $s := |x|$ und $t := \frac{r+2}{2}$): $\exists \tilde{c} > 0 \forall x \in (K(0, 2\sqrt{b}R_0+2))$:

$$(|x| - \frac{|x|}{2})^{\frac{r+2}{2}} \geq |x|^{\frac{r+2}{2} - \tilde{c}}$$

Da v in $(K(0, R_0+1))$ stetig ist, folgt die Behauptung (mit eventuell vergrößertem c) für alle $x \in (K(0, R_0+1))$.

C. zu 2): (der Index "2" wird weggelassen)

Sei $\forall r > R_0$: $\alpha(r) := t \ln r$ mit $t := \sqrt{b + (\frac{n-2}{2})^2} - \frac{1}{2} > 0$.

Im folgenden sei $t > 0$; für $t=0$ siehe die Bemerkung 3.

Es ist: $\alpha'(r) = \frac{t}{r}$, $\alpha''(r) = -\frac{t}{r^2}$, $\alpha'''(r) = \frac{2t}{r^3}$, also

$$\forall x \in (\bar{K}(0, R_0)) : \alpha'^2(|x|) - \alpha''(|x|) - \frac{(n-1)(n-3)}{4|x|^2} =$$

$$= \frac{t^2}{|x|^2} + \frac{t}{|x|^2} - \frac{(n-1)(n-3)}{4|x|^2} = b|x|^{-2} \leq q(x) - \lambda =: p(x) \quad (11).$$

α' ist beschränkt, also $\alpha'(\cdot)^{\frac{1}{2}} v \in L_2(\bar{K}(0, R_0))$, so daß Satz 1 wegen (11) ergibt:

$$\exists c_1 > 0 \forall r \geq R_0+1 : \int_{|y| \geq r} \alpha'(|y|) v^2(y) dy \leq c_1 r^{-2t} \quad (12).$$

Aus Lemma 3 folgt $\forall \phi \in C_0^\infty(\bar{K}(0, R_0))$, $\phi \geq 0$:

$$\int_{\bar{K}(0, R_0)} \alpha'(|y|) v^2(y) \Delta \phi(y) dy \geq -\beta \int_{\bar{K}(0, R_0)} \frac{\alpha'(|y|) v^2(y)}{|y|^2} \phi(y) dy$$

mit $\beta := (n-1) - 2b$.

Satz 2 (mit $\beta := \max\{0, (n-1) - 2b\}$, $\delta := 1$) sagt aus:

$$\exists c_2 > 0 \forall x \in (K(0, 2R_0 + 2)) : \alpha'(|x|) v^2(x) \leq \frac{c_2}{|x|^n} \int_{K(x, \frac{|x|}{2})} \alpha'(|y|) v^2(y) dy \leq$$

$$\leq \frac{c_2}{|x|^n} \int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} \alpha'(|y|) v^2(y) dy \leq \tilde{c} |x|^{-2t-n}, \quad \tilde{c} > 0 \text{ geeignet.}$$

(wegen (12))

$$\text{Also ist } |v(x)| \leq c |x|^{-t-\frac{n-1}{2}} = c |x|^{-\frac{n-2}{2} - \sqrt{b + (\frac{n-2}{2})^2}}, \quad c > 0 \text{ geeignet.}$$

Durch eventuelle Vergrößerung von c gilt das $\forall x \in (K(0, R_0 + 1))$.

D. zu 3): (der Index "3" wird weggelassen)

Sei $\forall r > R_0$: $\alpha(r) := r + \frac{1}{6} \sin 3r$. Dann ist

$$\alpha'(r) = 1 + \frac{1}{2} \cos 3r, \quad \alpha''(r) = -\frac{3}{2} \sin 3r, \quad \alpha'''(r) = -\frac{9}{2} \cos 3r.$$

$$\text{Somit } \forall x \in (\bar{K}(0, R_0)) : \alpha'^2(|x|) - \alpha''(|x|) - \frac{(n-1)(n-3)}{4|x|^2} =$$

$$= 1 + \cos 3|x| + \frac{1}{4} \cos^2 3|x| + \frac{3}{2} \sin 3|x| - \frac{(n-1)(n-3)}{4|x|^2} \leq q(x) - \lambda =: p(x) \quad (13).$$

α' ist beschränkt, also $\alpha'(|\cdot|)^{\frac{1}{2}} v \in L_2(\bar{K}(0, R_0))$, so daß

Satz 1 ergibt:

$$\exists c_1 > 0 \forall r \geq R_0 + 1 : \int_{|y| \geq r} \alpha'(|y|) v^2(y) dy \leq c_1 e^{-\frac{1}{3} \sin 3r} e^{-2r} \leq \tilde{c}_1 e^{-2r} \quad (14).$$

Aus Lemma 3 folgt $\forall \phi \in C_0^\infty(\bar{K}(0, R_0))$, $\phi \geq 0$:

$$\int_{\bar{K}(0, R_0)} \alpha'(|y|) v^2(y) \Delta \phi(y) dy \geq -\beta \int_{\bar{K}(0, R_0)} \alpha'(|y|) v^2(y) \phi(y) dy \text{ für ein } \beta \geq 0.$$

Satz 2 (mit $\delta := 0$) ergibt:

$$\exists c_2 > 0 \forall x \in (K(0, 2R_0 + 2)) : \alpha'(|x|) v^2(x) \leq c_2 \int_{K(x, \frac{1}{2})} \alpha'(|y|) v^2(y) dy \leq$$

$$\leq c_2 \int_{|y| \geq |x| - \frac{1}{2}} \alpha'(|y|) v^2(y) dy \leq c_2 \tilde{c}_1 e^{-2|x|}.$$

(wegen (14))

Also $|v(x)| \leq c e^{-|x|}$, $c > 0$ geeignet, und das gilt wieder in $(K(0, R_0 + 1))$.

2.4. Beispiele

Die folgenden, ausschließlich radialsymmetrischen Beispiele sollen lediglich verdeutlichen, daß die in Satz 3 betrachteten Fälle 1), 2) und 3) tatsächlich nichttrivial eintreten, daß die Ergebnisse für alle drei Fälle in ihrer Allgemeinheit nicht verbessert werden können (bis auf den

in Bemerkung 1 nach Satz 3 erwähnten Faktor $|x|^{-\frac{(\tau+2)(n-1)}{4}}$ bei 1) und 3) (letzteres mit $\tau:=0$) und daß mit 2) auch einige Eigenwerte im wesentlichen Spektrum erfaßt werden.

Beispiel 1: Sei $a>0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $q(x) := a^2 - \frac{(n-1)(n-3)}{4|x|^2}$.

Dann ist $q \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cap C^0(\bar{K}(0,1))$ reellwertig, also (H) erfüllt.

Sei $v(x) := |x|^{-\frac{n-1}{2}} e^{-a|x|}$. Dann ist $v \in L_2(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Es gilt $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $\Delta v(x) = \tilde{v}''(|x|) + \frac{n-1}{|x|} \tilde{v}'(|x|)$ mit

$\tilde{v}(r) := r^{-\frac{n-1}{2}} e^{-ar}$ (das erhält man durch Nachrechnen).

Somit $\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$: $\int_{\mathbb{R}^n} v(y) (-\Delta q(y)) \phi(y) dy =$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(-\tilde{v}''(|y|) - \frac{n-1}{|y|} \tilde{v}'(|y|) + q(y) \tilde{v}(|y|) \right) \phi(y) dy = 0.$$

(Beweis durch Nachrechnen)

Also ist $v \in D(T^*)$ mit $T^* v = 0$, das heißt $0 \in \sigma_p(T^*)$, und v ist zugehörige Eigenfunktion.

Nun sagt Satz 3,1) mit $b_1 := a^2$, $\tau := 0$ (man sieht aus dem Beweis, Formel (9), daß man hier $\epsilon = 0$ setzen kann und daß

$q(x) - \lambda \geq b_1 - \frac{(n-1)(n-3)}{4|x|^2}$ reicht):

$\exists c > 0 \forall x \in K(0,2): |v(x)| \leq c e^{-a|x|}$.

Beispiel 2: Sei $n:=7$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $q(x) := -\frac{4|x|^6 + 36|x|^2}{(1+|x|^4)^2}$.

Dann ist $q \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und damit T auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ wesentlich selbstadjungiert (siehe [39]).

Wie in Beispiel 1 sieht man, daß $v(x) := \frac{1}{1+|x|}$ Eigenfunktion von $T^* = \bar{T}$ zum Eigenwert $\lambda := 0$ ist.

Satz 3,2) mit $b_2 < -4$ sagt aus:

$$\forall a < 4 \exists R_a, c_a > 0 \forall x \in (K(0, R_a)) : |v(x)| \leq c_a |x|^{-a}.$$

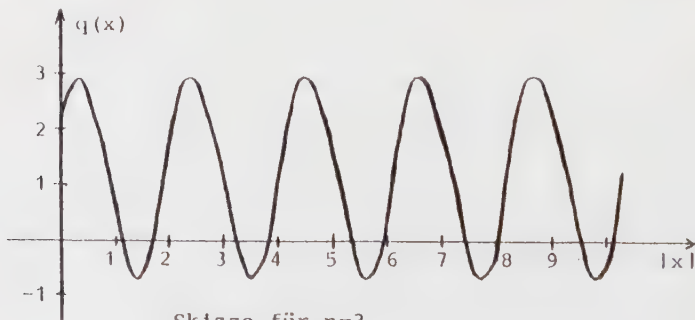
Es ist hier $\lambda \in \sigma_p(\bar{T}) \setminus \sigma_d(\bar{T})$ wegen Satz 0. Außerdem ist $q(x) - \lambda$ für $x \neq 0$ stets negativ.

Beispiel 3: Sei $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $q(x) := 1 + \cos 3|x| + \frac{1}{4} \cos^2 3|x| + \frac{3}{2} \sin 3|x| - \frac{(n-1)(n-3)}{4|x|^2}$. Wie in Beispiel 1 sieht man, daß

$v(x) := |x|^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{\sin 3|x|}{6}} e^{-|x|}$ Eigenfunktion von T^* zum Eigenwert $\lambda := 0$ ist.

Satz 3,3) sagt aus: $\exists c > 0 \forall x \in (K(0, 2)) : |v(x)| \leq c e^{-|x|}$.

Da (falls $n \geq 3$) $q(x) - \lambda \leq -\frac{1}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}j\pi$, $j \in \mathbb{N}_0$, stellt dies ein Beispiel dar, wo $q - \lambda$ auch weit draußen immerwieder kleiner als eine negative Konstante ist.



Bemerkungen: 1. In den Fällen 1) und 3) lassen sich auch stetige, beschränkte Potentiale angeben mit ähnlichen Ergebnissen; für Fall 1) zum Beispiel

$$q_1(x) := \begin{cases} a^2 - \frac{(n-1)a}{|x|} \tanh(a|x|) - \frac{2a^2}{\cosh^2(a|x|)} & \text{für } x \neq 0, \\ -na^2 & \text{für } x = 0; \end{cases}$$

für Fall 3) zum Beispiel:

$$q_3(x) := \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{2}\cos 3r\right)^2 + \frac{3}{2}\tanh\left(r + \frac{1}{6}\sin 3r\right)\sin 3r - \\ - \frac{n-1}{r}\left(1 + \frac{1}{2}\cos 3r\right)\tanh\left(r + \frac{1}{6}\sin 3r\right) - \frac{2\left(1 + \frac{1}{2}\cos 3r\right)^2}{\cosh^2\left(r + \frac{1}{6}\sin 3r\right)} & \text{für } r := |x| \neq 0, \\ -n\left(\frac{3}{2}\right)^2 & \text{für } |x| = 0. \end{cases}$$

Dann ist jeweils 0 Eigenwert des entsprechenden Operators, und zugehörige Eigenfunktionen sind

$$v_1(x) = \frac{1}{\cosh(a|x|)}, \text{ beziehungsweise } v_3(x) = \frac{1}{\cosh\left(|x| + \frac{1}{6}\sin 3|x|\right)}.$$

Die hiesige Methode ergibt $|v_1(x)| \leq c_\mu |x|^{\frac{n-1}{2} + \mu} e^{-a|x|}$ und

$$|v_3(x)| \leq c_\mu |x|^{\frac{n-1}{2} + \mu} e^{-|x|} \text{ für } \mu > 0 \text{ beliebig.}$$

2. Da es sich bei den Eigenfunktionen aus Beispiel 1, 3 und der Bemerkung 1 um radialsymmetrische Funktionen handelt, kann man wegen der Bemerkung 1 nach Satz 3

sogar eine um den Faktor $c|x|^{\frac{n-1}{2}}$ bessere obere Schranke erhalten, die dann dem tatsächlichen Verhalten der Eigenfunktionen entspricht. Dies zeigt insbesondere, daß die Abschätzung in Satz 1, bis auf die Konstante c , optimal ist.

3. Daß im Fall 2) von Satz 3 die hiesige Methode überhaupt keine allgemeine Verbesserung zuläßt, zeigt das abschließende Beispiel.

Sei $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $q(x) := \frac{2|x|^2-1}{(1+|x|^2)^2} - \frac{(n-1)(n-3)}{4|x|^2}$; $\lambda := 0$.

Dann ist $v(x) := |x|^{-\frac{n-1}{2}} (1+|x|^2)^{-\frac{1}{2}}$ Eigenfunktion von T^* zu λ .

Setzt man $\alpha(r) := \frac{1}{2} \ln(1+r^2)$, so folgt aus den Sätzen 1 und 2

(wobei von der Radialsymmetrie von v kein Gebrauch gemacht

wird): $|v(x)| \leq c|x|^{-\frac{n+1}{2}}$ ($|x| \geq 1$), eine punktweise obere Schranke, die dem tatsächlichen Abklingverhalten der Eigenfunktion entspricht.

Literatur

- [1] Adams, R.A., Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Agmon, S., On exponential decay of solutions of second order elliptic equations in unbounded domains, Lecture notes, Uppsala, 1979.
- [3] Ahlrichs, R., Asymptotic behaviour of atomic bound state wavefunctions, Chem. Phys. Lett., 15(1972), 609-612.
- [4] Ahlrichs, R., Asymptotic behavior of atomic bound state wave functions, J. Math. Phys., 14(1973), 1860-1863.
- [5] Ahlrichs, R., Hoffmann-Ostenhof, M., Hoffmann-Ostenhof, T., Bounds for the long-range behavior of electronic wavefunctions, J. Chem. Phys., 68(1978), 1402-1410.
- [6] Albeverio, S., On Bound States in the Continuum of N-body Systems and the Virial Theorem, Ann. Physics, 71(1972), 167-276.
- [7] Bardos, C., Mériqot, M., Décroissance exponentielle de la solution L^2 du problème de Dirichlet dans le complémentaire d'un fermé borné, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, 281(1975), 561-563.
- [8] Bardos, C., Merigot, M., Asymptotic decay of the solution of a second-order elliptic equation in an unbounded domain. Applications to the spectral properties of a Hamiltonian, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 76(1977), 323-344.
- [9] Bazley, N.W., Fox, D.W., Bounds for Eigenfunctions of One-Electron Molecular Systems, Int. J. Quantum Chem., 3(1969), 581-586.

- [10] Carmona, R., Pointwise Bounds for Schrödinger Eigenstates, *Comm. Math. Phys.*, 62(1978), 97-106.
- [11] Carmona, R., Simon, B., Pointwise Bounds on Eigenfunctions and Wave Packets in N-Body Quantum Systems, V. Lower Bounds and Path Integrals, *Comm. Math. Phys.*, 80(1981), 59-98.
- [12] Combes, J.M., Time-Dependent Approach to Nonrelativistic Multichannel Scattering, *Nuovo Cimento A*, 64(1969), 111-144.
- [13] Combes, J.M., Thomas, L., Asymptotic Behaviour of Eigenfunctions for Multiparticle Schrödinger Operators, *Comm. Math. Phys.*, 34(1973), 251-270.
- [14] Deift, P., Hunziker, W., Simon, B., Vock, E., Pointwise Bounds on Eigenfunctions and Wave Packets in N-Body Quantum Systems IV, *Comm. Math. Phys.*, 64(1978), 1-34.
- [15] Faris, W.G., Quadratic Forms and Essential Self-Adjointness, *Helv. Phys. Acta*, 45(1972), 1074-1088.
- [16] Glazman, I.M., Direct Methods of Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965.
- [17] Hartman, P., Putnam, C.R., The gaps in the essential spectra of wave equations, *Amer. J. Math.*, 72(1950), 849-862.
- [18] Hartman, P., Wintner, A., Partial differential equations and a theorem of A.Kneser, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), 4(1955), 237-255.
- [19] Hellwig, G., *Partielle Differentialgleichungen*, B.G.Teubner, Stuttgart, 1960.
- [20] Hellwig, G., *Differentialoperatoren der mathematischen Physik*, Springer, Berlin, 1964.

- [21] Hoffmann-Ostenhof, M., Hoffmann-Ostenhof, T.,
"Schrödinger inequalities" and asymptotic behavior
of the electron density of atoms and molecules,
Phys. Rev. A(3), 16(1977), 1782-1785.
- [22] Hoffmann-Ostenhof, T., A lower bound to the decay
of ground states of two-electron-atoms, Phys.
Lett. A, 77(1980), 140-142.
- [23] Hoffmann-Ostenhof, T., Hoffmann-Ostenhof, M.,
Bounds to expectation values and exponentially
decreasing upper bounds to the one-electron density
of atoms, J. Phys. B, 11(1978), 17-24.
- [24] Hoffmann-Ostenhof, T., Hoffmann-Ostenhof, M.,
Ahlrichs, R., "Schrödinger inequalities" and
asymptotic behavior of many-electron densities,
Phys. Rev. A(3), 18(1978), 328-334.
- [25] Hunziker, W., On the Spectra of Schrödinger Multi-
particle Hamiltonians, Helv. Phys. Acta, 39(1964),
451-462.
- [26] Kato, T., On the Eigenfunctions of Many-Particle
Systems in Quantum Mechanics, Comm. Pure Appl.
Math., 10(1957), 151-177.
- [27] Kato, T., Schrödinger operators with singular
potentials, Israel J. Math., 13(1972), 135-148.
- [28] Klaus, M., Some Applications of the Birman-Schwinger
principle, Preprint, Zürich, 1981.
- [29] Lieb, E.H., Simon, B., Pointwise Bounds on Eigen-
functions and Wave Packets in N-Body Quantum Systems,
VI. Asymptotics in the Two Cluster Region, Adv. in
Appl. Math., 1(1980), 324-343.
- [30] Lithner, L., A theorem of the Phragmén-Lindelöf
type för second-order elliptic operators, Ark.
Mat., 5(1965), 281-285.

- [31] Merkur'ev, S.P., On the asymptotic form of three-body wave functions for the discrete spectrum, Soviet J. Nuclear Phys., 19(1974), 222-229.
- [32] Morgan III, J.D., The exponential decay of sub-continuum wavefunctions of two-electron atoms, J. Phys. A, 10(1977), L91-L93.
- [33] O'Connor, A.J., Exponential Decay of Bound State Wave Functions, Comm. Math. Phys., 32(1973), 319-340.
- [34] Osterwalder, K., (Hrsg.), Mathematical Problems in Theoretical Physics, Proceedings, Lausanne 1979, Springer, Berlin, 1980.
- [35] Putnam, C.R., On isolated eigenfunctions associated with bounded potentials, Amer. J. Math., 72(1950), 135-147.
- [36] Reed, M., Simon, B., Methods of modern mathematical physics, IV: Analysis of operators, Academic Press, New York, 1978.
- [37] Schmincke, U.-W., Über das Verhalten der Eigenfunktionen eines singulären elliptischen Differentialoperators, Math. Z., 111(1969), 267-288.
- [38] Schrader, R., Seiler, R., Uhlenbrock, D.A., (Hrsg.), Mathematical Problems in Theoretical Physics, Proceedings, Berlin(West) 1981, Springer, Berlin, 1982.
- [39] Simader, C.G., Bemerkungen über Schrödinger-Operatoren mit stark singulären Potentialen, Math. Z., 138(1974), 53-70.
- [40] Simon, B., Quantum Mechanics for Hamiltonians Defined as Quadratic Forms, Princeton University Press, Princeton, 1971.
- [41] Simon, B., Pointwise bounds on eigenfunctions and wave packets in N-body quantum systems. I, Proc. Amer. Math. Soc., 42(1974), 395-401.

- [42] Simon, B., Pointwise bounds on eigenfunctions and wave packets in N-body quantum systems. II, Proc. Amer. Math. Soc., 45(1974), 454-456.
- [43] Simon, B., Pointwise bounds on eigenfunctions and wave packets in N-body quantum systems. III, Trans. Amer. Math. Soc., 208(1975), 317-329.
- [44] Simon, B., Functional Integration and Quantum Physics, Academic Press, New York, 1979.
- [45] Simon, B., Schrödinger Semigroups, Preprint, Pasadena, 1982.
- [46] Slagge, E.L., Wichmann, E.H., Asymptotic Properties of the Wave Function for a Bound Nonrelativistic Three-Body System, J. Math. Phys., 3(1962), 946-968.
- [47] Шнол', Ё.Ё., О поведении собственных функций уравнения Шредингера, Mat. Sb., 42(1957), 273-286, erratum, 46(1958), 259.
- [48] Stein, E.M., Weiss, G., Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton University Press, Princeton, 1971.
- [49] Weidmann, J., Lineare Operatoren in Hilberträumen, B.G.Teubner, Stuttgart, 1976.
- [50] Wintner, A., On the smallness of isolated eigenfunctions, Amer. J. Math., 71(1949), 603-611.



Lebensdaten

Andreas M. Hinz

08. Februar 1954 Geburt in Schönberg/Holstein

Eltern: Verwaltungsbeamter Otto Hinz

Fremdsprachl. Korrespondentin Halide, geb. Muhieddin

1960-1964 Besuch der Westendschule in Worms

1964-1972 Besuch des Gauß-Gymnasiums in Worms

Mai 1972 Abitur

1972-1979 Studium der Mathematik und der Physik
an der Universität München

1973 Sprachkurs in Cambridge/England

Januar 1979 Diplom im Fach Mathematik

1979-1981 Tätigkeiten als wissenschaftlicher
Mitarbeiter am Mathematischen Institut
der Universität München

1981-1982 Assistent an der Abteilung für Theoretische
Physik der Universität Genf/Schweiz

1972-1979 und Stipendiat der Studienstiftung des
1980-1982 deutschen Volkes

Verheiratet mit der Erzieherin Christine Hinz, geb. Glatz

Kinder: Veronika und Helena

